# מועד א', סמסטר חורף תשע"ה - אלגברה 1/מ, 104016
**4.2.15**

ת"ז: | | | | | | | | | |  פקולטה: | |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
**בשאלות 4-8** יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
**בשאלה 9** יש לסמן אם הטענה נכונה או לא נכונה במקום המתאים בשאלה. סימון נכון מזכה ב- 2 נקודות; על סימון לא נכון **תורד נקודה אחת**. אי סימון כלל לא מזכה בנקודות.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-9.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.
- סך הנקודות שניתן לצבור במבחן הוא 101 אבל הציון הסופי לא יעלה על 100.

**ב ה צ ל ח ה !**

**טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8**

| | שאלה מס' 4 | שאלה מס' 5 | שאלה מס' 6 | שאלה מס' 7 | שאלה מס' 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| א. | | | | | |
| ב. | | | | | |
| ג. | | | | | |
| ד. | | | | | |

**לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.**

**<u>שאלה מס' 1</u>** : (25 נקודות)

יהי $R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר $2\times 2$ מעל $R$, יהי $T:R^{2\times 2}\to R^{2\times 2}$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c+3d & b+c+3d \\ b+2c+5d & -a+2c+3d \end{pmatrix}$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של $T$.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של $T$.

ג. (5 נק') מצאו את אוסף כל המטריצות $A$ המקיימות: $T(A)=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ והסבירו האם אוסף זה מהווה תת מרחב וקטורי של $R^{2\times 2}$.

ד. (5 נק') הוכיחו שעבור כל מטריצה **סימטרית** $B$ השייכת ל- $\mathrm{Im}(T)$, המטריצה $B^2$ סקלרית.

ה. (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת את $T$ (כלומר את $[T]_S$) לפי הבסיס $S$ של $R^{2\times 2}$ כאשר

$$S=\left\{S_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

**<u>שאלה מס' 2</u>** : (20 נקודות)

תהי $A$ המטריצה הממשית הבאה, כאשר $k$ פרמטר ממשי:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -18 & -1 & 13 \\ 6 & k & -2 \end{pmatrix}.$$

נתון כי $v=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $A$ עם ערך עצמי $\lambda$.

א. (5 נק') מצאו את $k$ ואת $\lambda$.

ב. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של $A$.

ג. (10 נק') הוכיחו כי $A$ לכסינה מעל $R$ ומצאו מטריצה הפיכה $P$ ומטריצה אלכסונית $D$ כך ש $P^{-1}AP=D$.

**<u>שאלה מס' 3</u>** : (24 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב**

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $F$. אם $v_1, v_2, ..., v_k$ הם וקטורים בלתי תלויים לינארית ב- $V$ והווקטור $u \in V$ אינו ניתן להצגה כצרוף לינארי שלהם אז גם הקבוצה $\{v_1, v_2, ..., v_k, u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

ב. (7 נק') אם $A$ , $B$ הן שתי מטריצות ממשיות ודומות מסדר $n \times n$ אז הן גם שקולות שורה.

ג. (7 נק') תהי $A \in R^{3\times 3}$ מטריצה נתונה, ויהיו $T, S : R^3 \to R^3$ שני אופרטורים לינאריים המוגדרים ע"י: $T(v) = (3I - A)v$ ו- $S(v) = (I + A)v$. אז $Ker(T) \cap Ker(S) = \{0\}$.

**שאלה מס' 4** : (4 נקודות)

יהי $a+ib$ מספר מרוכב ו- $n$ מספר טבעי. נתון ש: $z_1=\sqrt[4]{2}cis(15^\circ)$ ו- $z_2=\sqrt[4]{2}cis(315^\circ)$ הם שני פתרונות של המשוואה $z^n=a+ib$. עבור כל מספר מרוכב, נעבוד עם ארגומנט $\theta$ המקיים $0\le\theta<360^\circ$. נתון גם כי הארגומנט של $z_1$ הוא הקטן ביותר והארגומנט של $z_2$ הוא הגדול ביותר מבין כל פתרונות המשוואה $z^n=a+ib$. אז:

א. $b<0$ ; ב. $n=4$ ; ג. $\overline{z_1}$ הוא גם פתרון למשוואה ; ד. $a<2$

**שאלה מס' 5** : (4 נקודות)

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $F$ ויהיו $v_1,v_2,v_3,v_4$ וקטורים ב- $V$. נתון כי:

$$v_4\in span\{v_1,v_2,v_3\}\ ,\quad v_4\notin span\{v_1,v_2\}$$

סמנו את **שתי** הטענות **שאינן** נכונות מבין הטענות הבאות:

א. $v_3\in span\{v_1,v_2\}$.

ב. $v_3\in span\{v_1,v_2,v_4\}$.

ג. אם $\{v_1,v_2\}$ בלתי תלויים לינארית אז $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3\}\right)=3$.

ד. $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)=3$.

**שאלה מס' 6** : (4 נקודות)

נתון כי: $\begin{vmatrix}2a & 2b & 2c\\ x+a & y+b & z+c\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=4$. אז $\begin{vmatrix}\alpha & x & a\\ \beta & y & b\\ \gamma & z & c\end{vmatrix}$ שווה ל:

א. $-2$ ; ב. $4$ ; ג. $\frac{1}{2}$ ; ד. $\frac{1}{4}$.

**שאלה מס' 7** : (4 נקודות)

יהי $W$ מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות מסדר $3\times3$ מעל $R$ ויהי $U$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 6 מעל $R$. תהי $T:W\to U$ העתקה לינארית. אז:

א. אם $1,x\in\operatorname{Im}(T)$ אז $\dim(KerT)=4$.

ב. אם $Ker(T)=span\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right\}$ אז $\dim(\operatorname{Im}T)=3$.

ג. $T$ לא חד-חד-ערכית.

ד. $T$ לא על.

**שאלה מס' 8** : (4 נקודות)

תהי $A \in C^{n\times n}$ . אז $A=0$ אם"ם :

א. $A^2=0$ .

ב. $|A|=0$ .

ג. הפולינום האופייני של $A$ הוא $f(\lambda)=\lambda^n$ .

ד. $Av=0$ לכל $v \in C^n$ .

**שאלה מס' 9** : (12 נקודות)

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא נכונה, וסמנו את התשובה במקום המתאים בטבלה (אין צורך לנמק. נימוקים לא ייבדקו) :

| טענה | נכון | לא נכון |
|---|---|---|
| 1. יהי $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס של מרחב וקטורי $V$ מעל $R$ ויהי $v \in V$ כך ש $[v]_B=(1,2)$ . אז $3v=3v_1+6v_2$ . | | |
| 2. אם $A$ היא מטריצה מסדר $n\times n$ והפיכה כך שכל האיברים של $A$ ושל $A^{-1}$ הם מספרים שלמים בלבד, אז $\left\|A^{2015}\right\|=1$ . | | |
| 3. יהי $V=C^2$ מרחב וקטורי מעל $C$ ויהי $T:V\to V$ מוגדר ע"י $T(z_1,\ z_2)=(z_1,\ \overline{z}_2)$ . אז $T$ העתקה לינארית. | | |
| 4. אם $A$ ו- $B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$ , הפיכות ודומות אז גם $A^{-1}$ ו- $B^{-1}$ דומות. | | |
| 5. יהי $V$ מרחב הפונקציות מ- $R$ ל- $R$ מעל $R$, ויהי $W=span\{e^x\ ,\ e^{-x}\}$ . אז $\dim(W)=2$ . | | |
| 6. תהי $A\in R^{2\times 2}$ . אם $\|A\|<0$ אז $A$ לכסינה מעל $C$. | | |